6С

УДК 519.2

***А.І. Сегін***
Інститут проблемно-орієнтованих комп’ютерних систем Карпатського державного центру інформаційних засобів і технологій НАН України, м. Тернопіль, Україна
andriy.segin@gmail.com

# Перспективи побудови кореляційних моделей в полярній системі координат

У статті представлено результати досліджень побудови кореляційних моделей в полярній системі координат та наведено відповідні математичні вирази. Показано особливості побудови, представлення та перспективи використання кореляційних моделей в полярній системі.

Кореляційний аналіз є потужним апаратом, який широко застосовується в різноманітних сферах наукових досліджень та вирішенні прикладних задач. Основним його призначенням, виходячи з визначення кореляції, є встановлення залежностей між стохастичними процесами. Проте на сучасному етапі цей метод має набагато ширше застосування і використовується як для дослідження стохастичних сигналів, так і для ідентифікації та встановлення взаємозалежностей детермінованих сигналів. Кореляція є ефективним інструментом в радіоелектроніці, цифровій обробці сигналів, радіолокації, економіці, астрономії та багатьох інших сферах.

На практиці використання кореляції, як правило, потребує аналітичного опису певного еталонного процесу чи об’єкта, вираженого функцією однієї величини від іншої чи декількох інших. В переважній більшості кореляційний аналіз застосовується для процесів, які є функціями часу, при дослідженні поведінки об’єктів в часі та встановлення кількісної міри взаємозалежності чи подібності певних процесів.

Проте існує й інший клас задач, який полягає у розпізнаванні об’єктів на основі їх корелювання з певним набором еталонних образів. В таких задачах об’єкт може описуватися не тільки функцією часу, а й функціями інших фізичних величин. Наприклад, при ідентифікації графічних образів за їх геометричною формою еталонні об’єкти задаються функціями їх просторових координат.

Вирішення різного роду задач на базі кореляційного аналізу переважно здійснюється на основі математичного опису об’єктів у вигляді функцій в прямокутній системі координат. Проте існує ряд випадків, коли описувати об’єкти аналітичними виразами простіше в полярній системі координат. Наприклад, при аналізі обертових процесів, дослідженні руху об’єктів з еліптичними траєкторіями та ряду інших задач. Крім того, самі кореляційні функції, представлені в полярній системі координат, в ряді випадків мають більш інформативний і наглядніший вигляд, ніж представлення в прямокутній системі.

## 1. Кореляційні функції в часовому просторі

Як показано в [1], [2], існує декілька варіантів оцінок, що застосовуються для визначення кореляційних властивостей об’єкта в часовому просторі. Для дискретних сигналів вони визначаються відповідними виразами, наведеними нижче.

Кореляційна функція:

$$R_{xx}(j)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathring{x}_i\cdot\mathring{x}_{i+j}\ .$$

Коваріаційна функція:

$$K_{xx}(j)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot x_{i+j}\ .$$

Нормована кореляційна функція:

$$\rho_{xx}(j)=\frac{R_{xx}(j)}{D_x}\ .$$

Знакова функція:

$$H_{xx}(j)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}sgn[\,\mathring{x}_i\,]\cdot sgn[\,\mathring{x}_{i+j}\,]\ ,$$

де $sgn[\,x_i\,]=\begin{cases}1, & x_i>0\\ 0, & x_i=0\\ -1, & x_i<0\end{cases}$ – знакова функція.

Полярна функція:

$$P_{xx}(j)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathring{x}_i\cdot sgn[\,\mathring{x}_{i+j}\,] \text{ або } P_{xx}(j)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot sgn[\,\mathring{x}_{i+j}\,]\ .$$

Структурна функція Колмогорова:

$$C_{xx}(j)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i+j})^2\ .$$

Модульна функція:

$$G_{xx}(j)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-x_{i+j}\right|.$$

Функція еквівалентності:

$$\check{F}_{xx}(j)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\check{z}_i[\,x_i,x_{i+j}\,]\ ,$$

де $\check{z}_i[x_i,x_{i+j}]=\check{z}_i=\begin{cases}x_i,\ при\ x_i\le x_{i+j},\\ x_{i+j},\ при\ x_i>x_{i+j}.\end{cases}$ – функція «менше з двох».

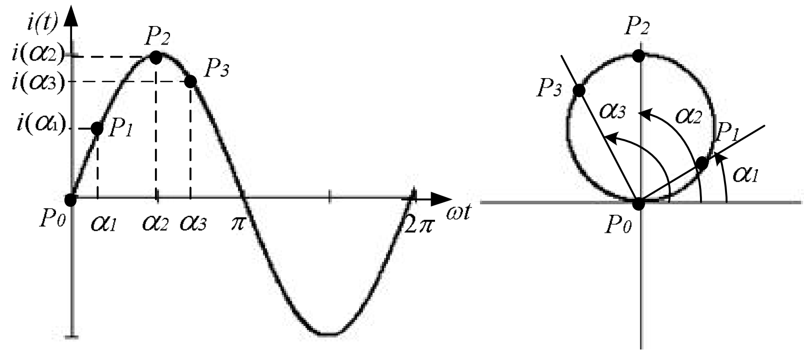
Аналогічні вирази можна навести і для оцінки взаємокореляцій між двома різними процесами. Більш детально наведені оцінки, їх переваги та сфери застосування проаналізовано в публікаціях [1], [2].

# 2. Представлення гармонічних сигналів в полярній системі координат

Як правило, при дослідженні чи контролі об’єктів найчастіше доводиться мати справу з процесами як функціями від часу, що описують поведінку даного об’єкта. Велика кількість таких процесів мають аналітичне представлення в полярній системі координат, набагато простіший вигляд, ніж в прямокутній. Тому такі процеси при кореляційному аналізі також доцільно розглядати в полярній системі координат, що

значно спростить обчислення кореляційної функції. Крім того, буде більш наглядним і зрозумілим як графік самого процесу, так і його авто- чи взаємокореляційної функції в полярних координатах.

Особливе місце серед них займають періодичні процеси. Як відомо, періодичні функції в полярній системі координат відображаються замкнутими кривими, що повторюються при проходженні кожного періоду. Наприклад, функція $sin$, яка часто використовується при опису електричних процесів, цифровій обробці сигналів та в багатьох інших випадках. Так траєкторія синусоїдального струму, тобто звичайного змінного струму $i(t) = I_m \sin \omega t$ (рис. 1) в полярних координатах представляється у вигляді кола з діаметром, рівним амплітуді струму $I_m$, з центром в точці з полярними координатами $\left( \frac{I_m}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$, $\rho = i(\varphi)$, $\varphi = \omega t$.

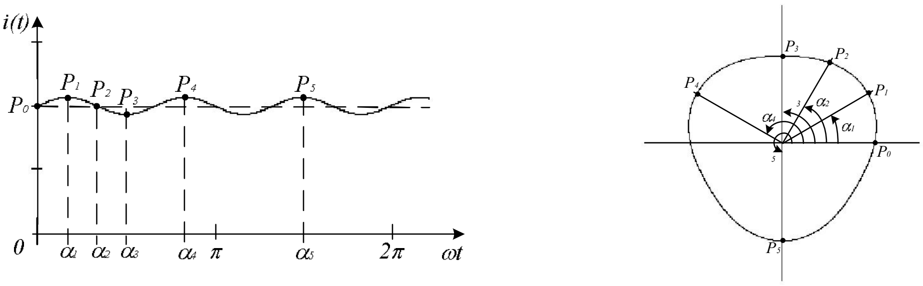



а) б)

Рисунок 1 – Представлення змінного струму в прямокутних (а) і полярних (б) координатах

При наявності в струмі початкової фази $\varphi_0 > 0$ в полярних координатах його графік буде відображений у вигляді кола з тим же радіусом, що й при нульовій фазі, тільки з центром кола, зміщеним в точку з полярними координатами $\left( \frac{I_m}{2}, \frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right)$.

Полярна система координат також зручна і при аналізі електричних кіл з постійним струмом. Очевидно, що графік ідеального постійного струму $i(t)$ в будь-який момент часу $t$ в полярних координатах при будь-якому значенні $\varphi$ буде мати вигляд кола радіусом $I_0$ з центром у точці початку координат, тобто точці з полярними координатами (0, 0). Неідеальний постійний струм (рис. 2а) в полярних координатах утворює фігуру, представлену на рис. 2б, яка дещо відрізняється від кола.




а) б)

Рисунок 2 – Графіки неідеального постійного струму в прямокутній (а) і полярній (б) системах координат

Таким чином, використання полярної системи координат для візуалізації траєкторій усталених процесів дозволяє, по-перше, використовувати властивість періодичності останніх, повністю відображати їх на обмеженому просторі (кресленні чи екрані) необмежено довго в часі, а по-друге, зіставляти ці процеси з геометричними фігурами і, як наслідок, оперувати з ними за допомогою багатого математичного апарату для їх дослідження, в тому числі і кореляційного аналізу. Особливо важливою є та обставина, що найбільш значимі для електротехнічної практики процеси синусоїдального струму в полярних координатах зображаються у вигляді надзвичайно простої і наочної фігури – кола.

Тригонометрична функція *sin*, як вже зазначалося, широко використовується не тільки в електроенергетиці, а й в інших сферах. За її допомогою описується широкий спектр процесів. У цьому аспекті не можна не згадати цифрову обробку сигналів, в якій одну з ключових ролей відіграє спектральний аналіз в базисі Фур'є, в якому будь-який сигнал розкладається по базисних синусоїдальних складових різної частоти – гармоніках.

На рис. 3а зображено часову залежність струму, який містить основну і третю гармоніку та описується рівнянням:

$$i(\omega t) = 10 \sin \omega t + \frac{10}{3} \sin 3\omega t \,.$$

В полярних координатах траєкторія цього струму буде мати вигляд, показаний на рис. 3б.

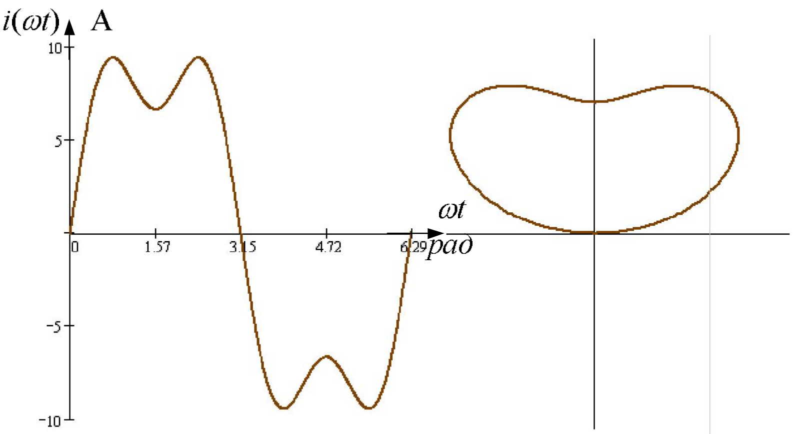



Рисунок 3 – Графіки струму $i(\omega t) = 10 \sin \omega t + \frac{10}{3} \sin 3\omega t$ в прямокутних (а) і полярних (б) координатах

Як видно з рис. 3, представлення спектральних характеристик в полярній системі координат має наочне зображення, описується досить простим аналітичним виразом, а отже може ефективно використовуватись при спектральному аналізі сигналів. Як відомо, спектральний аналіз в базисі Фур'є по суті є також кореляційним аналізом, при якому досліджуваний сигнал корелюють з синусоїдами різної частоти і тим самим визначають енергетичний спектр сигналу, тобто долю енергії, яку складає в сигналі відповідна гармоніка.

# 3. Побудова кореляційних моделей в полярній системі координат

Розглянемо взаємоковаріаційну функцію

$$K_{xy}(j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_{i+j} \ ,$$

так як вона є простішою порівнянно зі взаємокореляційною,

$$R_{xx}(j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathring{x}_i \cdot \mathring{x}_{i+j} \ ,$$

оскільки не потребує центрування і нормування, а отже, і попереднього обчислення математичного сподівання та дисперсії. В даному виразі $x_i$ та $y_i$ є функціями від часу в дискретному просторі, записаними в прямокутній системі координат. Кожна точка процесу буде мати дві координати $(\Delta t \cdot i, x_i)$ і відповідно процесу $y_i$ – $(\Delta t \cdot i, y_i)$, а якщо перейти до дискретного простору, то відповідно $(i, x_i)$ та $(i, y_i)$, $i = \overline{1, N}$. При переході до полярних координат функції часу $x(t)$ буде відповідати функція кута $r_x(\varphi)$, а функції часу $y(t)$ – функція $r_y(\varphi)$. Якщо представити ці функції кута в дискретному просторі, який відповідає дискретизації функцій часу з кроком $\Delta t$, то вони запишуться у вигляді $r_x(\Delta\varphi \cdot i)$ та $r_y(\Delta\varphi \cdot i)$, $i = \overline{1, N}$ або $rx_i$ та $ry_i$, де $\Delta\varphi$ – відповідний крок дискретизації в полярних координатах. При цьому кожному дискретному значенню часу $\Delta t \cdot i$ буде відповідати дискретне значення кута $\Delta\varphi \cdot i$, $i = \overline{1, N}$.

Тоді взаємоковаріаційна функція в полярній системі координат буде мати наступний вигляд:

$$Krx\,ry(j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} rx_i \cdot ry_{i+j} \ , \qquad (1)$$

де $j = 0, 1, ..., m$, що відповідає зсуву на кут $\psi = j \cdot \Delta\varphi$ в полярних координатах; $rx_i$ – дискретне значення першої функції; $ry_i$ – дискретне значення другої функції. При цьому $m + n = N$, тобто загальний проміжок спостереження дорівнює довжині вибірки плюс максимальне дискретне значення кута зсуву.

Якщо коваріація проводиться над однією й тією ж функцією, зсунутою на певний кут, тобто обчислюється автоковаріаційна функція, то вираз (1) набуде вигляду:

$$Krx\,rx(j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} rx_i \cdot rx_{i+j} \ .$$

Структурна функція Колмогорова в полярних координатах буде мати вигляд:

$$Crx\,rx(j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (rx_i - rx_{i+j})^2$$ – автоструктурна функція;

$$Crx\,ry(j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (rx_i - ry_{i+j})^2$$ – взаємоструктурна функція.

Відповідно авто- та взаємомодульні функції в полярній системі координат набудуть вигляду

$$Grx\,rx(j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|rx_i - rx_{i+j}\right|; \qquad Grx\,ry(j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|rx_i - ry_{i+j}\right|.$$

Функції авто- та взаємоеквівалентності:

$$Frx\,rx(j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\check{z}(rx_i, rx_{i+j}); \qquad Frx\,ry(j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\check{z}(rx_i, ry_{i+j}).$$

Кореляційні, полярні та знакові функції в межах даної статті розглядатись не будуть, оскільки вимагають додаткових досліджень методів обчислення та представлення таких статистичних характеристик як математичне сподівання, дисперсія, середньоквадратичне відхилення, а також процедури центрування та нормалізації.

# 4. Реалізація побудови кореляційних моделей для деяких типових сигналів

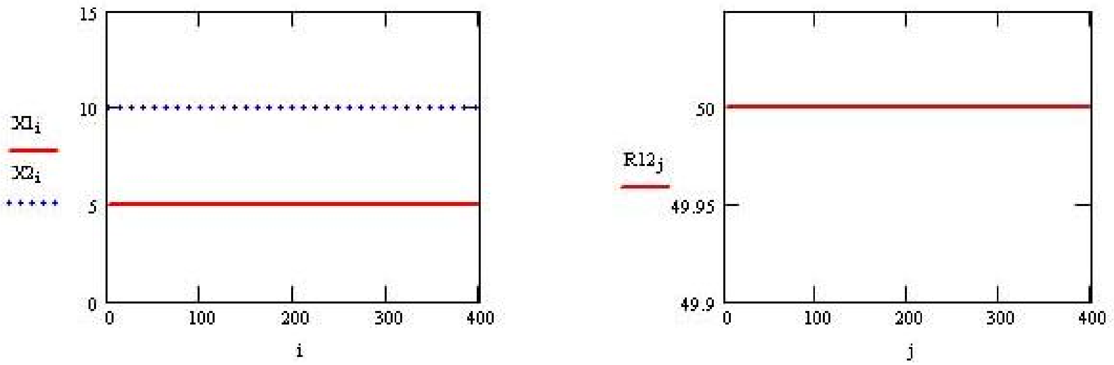
На основі проведених досліджень та поданих вище математичних інтерпретацій кореляційних функцій в полярних координатах побудуємо кореляційні моделі найбільш типових процесів та сигналів, що зустрічаються на практиці. Для простоти обчислень і наочності графічних представлень будемо використовувати взаємоковаріаційну функцію.

Розглянемо сталі сигнали, які в прямокутному просторі можна представити на графіку прямими лініями, паралельними осі абсцис: $X1 = 5$ і $X2 = 10$. Якщо прокорелювати два таких сигнали з різною амплітудою між собою, то отримаємо кореляційну функцію такого ж вигляду, тобто також пряму лінію відповідної амплітуди (рис. 4).

Аналогічно представимо ці ж сигнали та їх взаємоковаріаційну функцію (1) в полярних координатах (рис. 5).

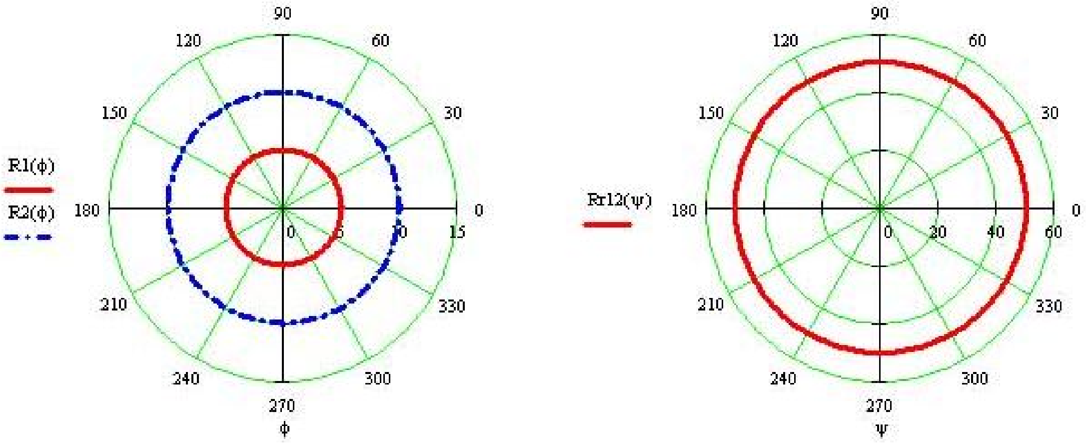
Результат графічного представлення очевидний. Як і слід було очікувати, сигнали на графіках в полярних координатах представляються колами відповідних радіусів рівних амплітуді сигналів, і їх коваріаційна функція відповідно має такий же вигляд.

Тепер розглянемо результат коваріації двох синусоїд різної амплітуди, які задаються виразами: $X1(t) = 5\,sin(\omega t)$ і $X2(t) = 10\,sin(\omega t)$ в прямокутних і полярних координатах (рис. 6 та 7 відповідно).



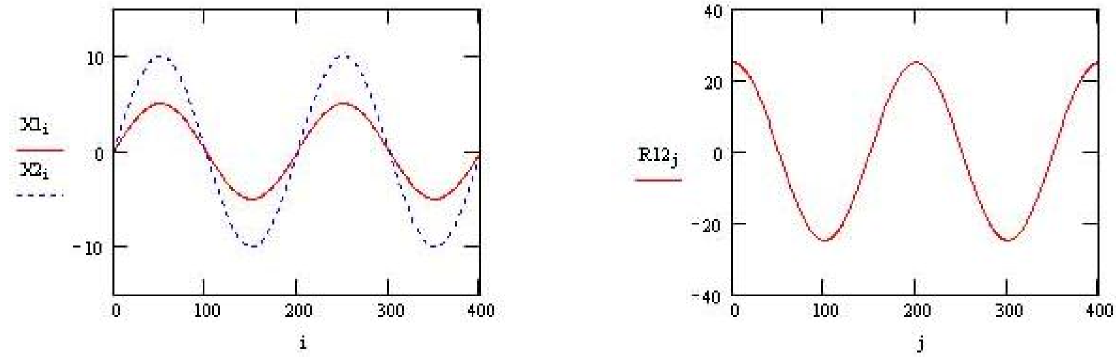

а) б)

Рисунок 4 – Графіки сигналів (а) та їх взаємоковаріаційної функції (б) в прямокутній системі координат




а) б)

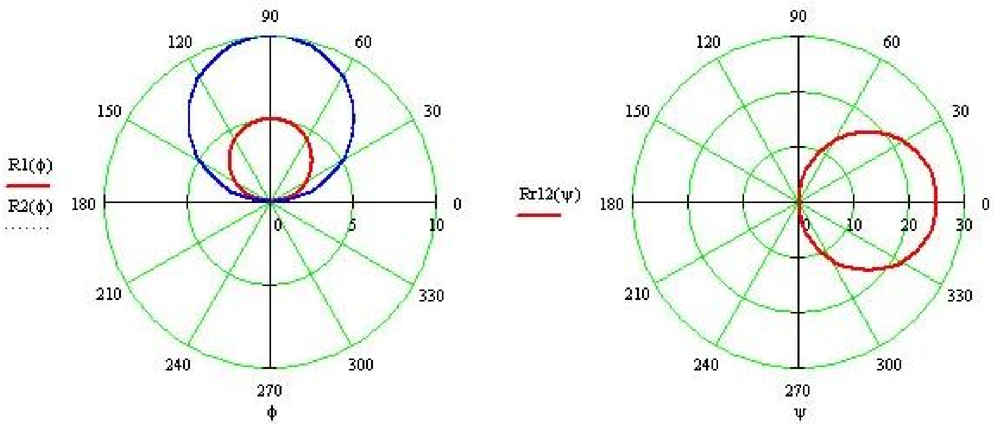
Рисунок 5 – Графіки сигналів (а) та їх взаємоковаріаційної функції (б) в полярній системі координат




а) б)

Рисунок 6 – Графіки функцій синусоїд та їх взаємоковаріаційної функції (а) (б) в прямокутних координатах.

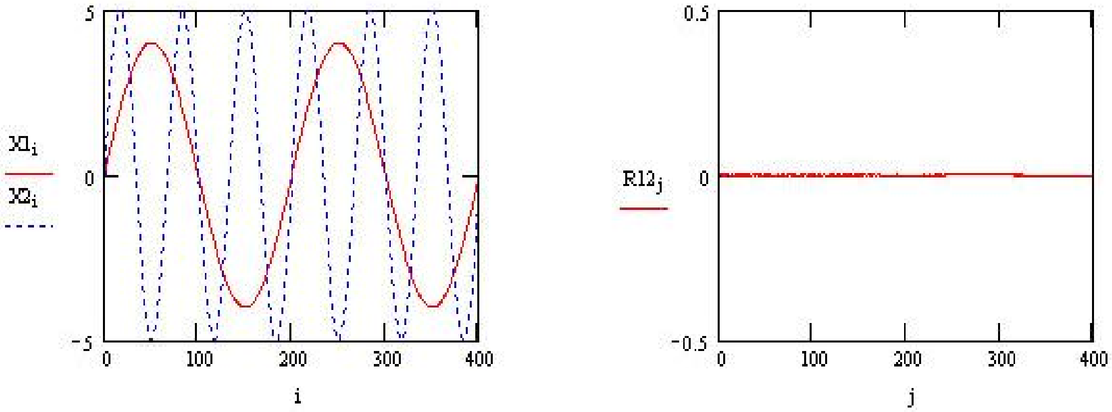
Для синусоїдальних функцій з різною частотою і амплітудою, як відомо з теорії спектрального аналізу сигналів, кореляційні зв'язки відсутні, на чому власне і базується спектральний аналіз.




а) б)

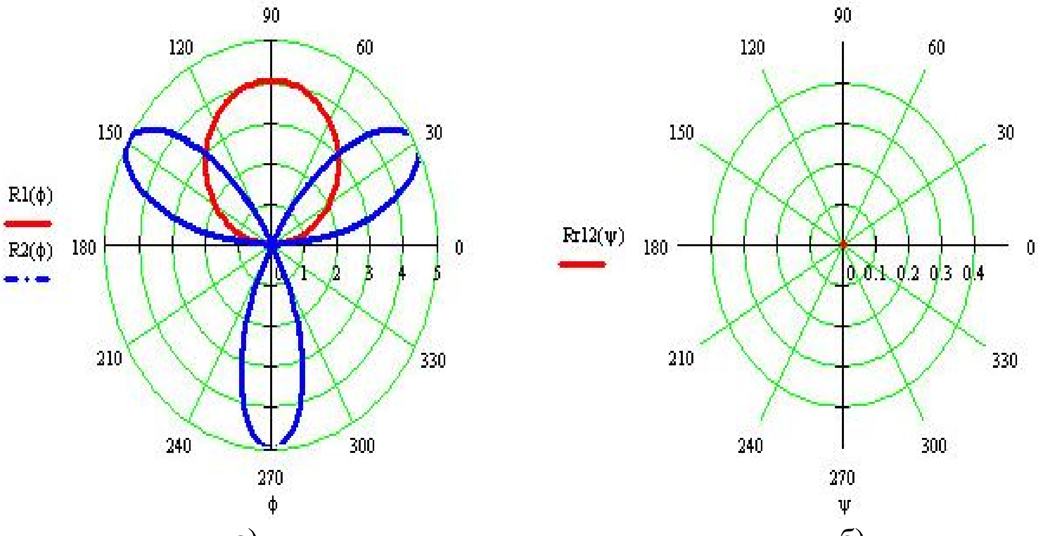
Рисунок 7 – Графіки функцій синусоїд (а) та їх взаємоковаріаційної функції( б) в полярних координатах

У такому випадку коваріаційна функція (1) повинна бути близькою до нуля, що й підтверджується поданими графіками на рис. 8 та рис. 9. На них представлені графіки функцій $X1(t)=4\cdot sin(t)$ та $X2(t)=5\cdot sin(3t)$ і відповідна їм коваріаційна функція. Як видно з рис. 9, коваріаційна функція зображена точкою на початку системи координат.




а) б)

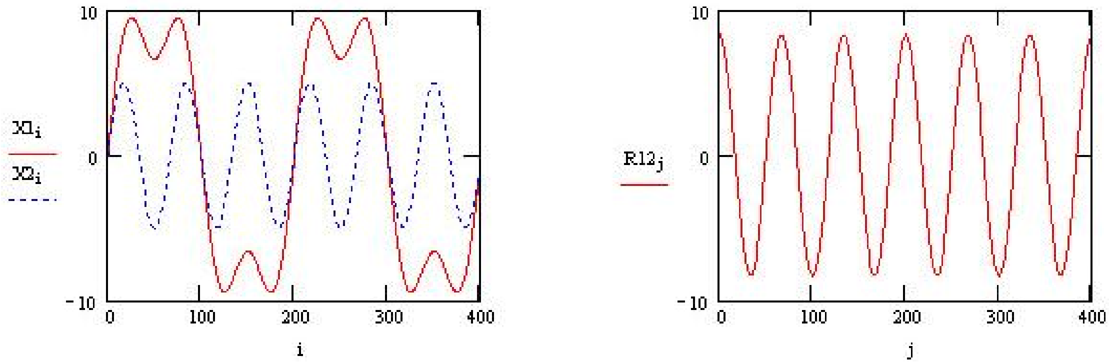
Рисунок 8 – Графіки функцій $X1(t)=4\cdot sin(t)$ і $X2(t)=5\cdot sin(3t)$ (а) та їх взаємоковаріаційної функції (б) в прямокутних координатах




а) б)

Рисунок 9 – Графіки функцій $X1(t)=4\cdot sin(t)$ і $X2(t)=5\cdot sin(3t)$ (а) та їх взаємоковаріаційної функції в полярних координатах (б)

Побудуємо коваріаційну модель двох сигналів, які мають спільну третю гармоніку. Відповідно це повинно відобразитися на графіках коваріаційних функцій в прямокутному та полярному просторах, тобто ці гармоніки при кореляції повинні дати позитивний результат і повинна проявитись їх подібність. Отже, на рис. 10 та рис. 11 наведено графіки функцій $X1(t)=10\cdot sin(t)+\frac{10}{3}sin(3t)$ та $X2(t)=5\cdot sin(3t)$ і коваріаційної функції.




а) б)

Рисунок 10 – Графіки функцій $X1(t) = 10 \cdot sin(t) + \frac{10}{3} sin(3t)$ та $X2(t) = 5 \cdot sin(3t)$ (а); графік коваріаційної моделі (б) в прямокутному просторі

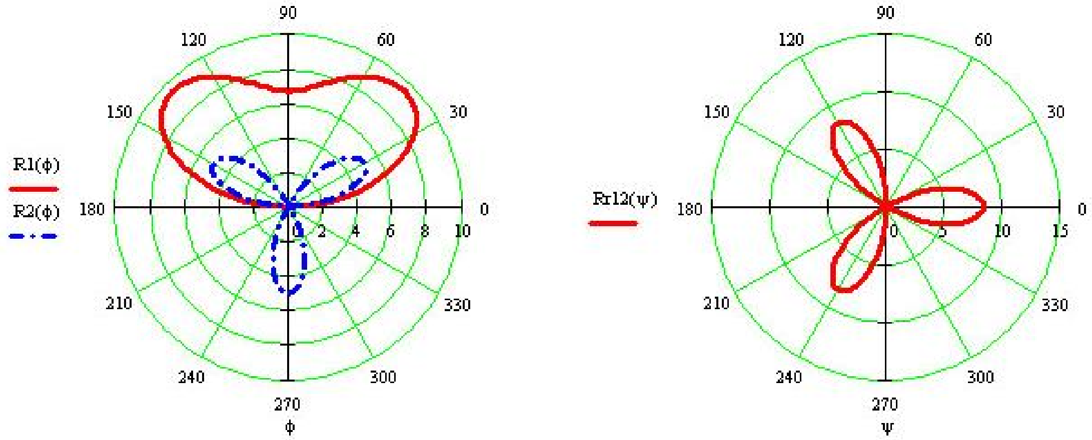



Рисунок 11 – Графіки функцій $X1(t) = 10 \cdot sin(t) + \frac{10}{3} sin(3t)$ та $X2(t) = 5 \cdot sin(3t)$ (а); графік коваріаційної моделі (б) в полярному просторі

З рис. 11б чітко видно кореляцію між третіми гармоніками сигналів, що відображається на графіку кількістю пелюсток, при цьому, не зважаючи на зсув фаз вхідних сигналів, відбувається приведення їх до нульового зсуву в самій кореляції, що характерно і для кореляційних функцій в часовому просторі.

На практиці існує багато широко розповсюджених видів сигналів, які також можна ефективно зображати в полярній системі координат, що будуть мати цікаві графічні представлення в цьому просторі. Побудова їх авто- та взаємокореляційних моделей в полярній системі координат також може дати важливі позитивні результати.

# Висновок

Таким чином, показано ефективність використання кореляційних моделей, побудованих в полярній системі координат для аналізу гармонічних сигналів. При цьому є очевидні переваги зображення графіків у цьому просторі: періодичні сигнали представляються у вигляді замкнутої кривої, можливість відображати сам процес і його кореляційні моделі на обмеженому просторі (екрані, аркуші паперу), навіть коли сам процес досліджується на достатньо великому проміжку часу або взагалі є безкінечним.

У статті наведено тільки початкові результати побудови кореляційних моделей в основному для гармонійних сигналів. Проте є надзвичайно широка сфера ефективного використання кореляційних моделей в полярній системі координат, таких як дослідження обертових процесів, здійснення спектрального аналізу сигналів в різних базисах, ідентифікація графічних зображень на площині та ряду інших. Крім того, при переході від полярних координат до сферичних та реалізації кореляційних моделей у сферичному просторі, дає потужний апарат для дослідження, аналізу та наочного відображення траєкторій, орбіт небесних тіл та їх взаємовпливу.

# Література

1. Николайчук Я.М., Сегін А.І. Моделі джерел інформації та методи їх представлення // Методи та прилади контролю якості. – ІФДТУНГ. – 1998. – № 2. – С. 80-84.
2. Сегін А.І. Подання і аналіз об'єктів управління як джерел інформації та методика побудови їх кореляційних моделей // Розвідка і розробка нафтових і газових родовищ. – Івано-Франківськ: ІФДТУНГ. – Серія: Технічна кібернетика та електрифікація об'єктів паливно-енергетичного комплексу. – 1997. – Т. 6, № 34. – С. 23-34.

***А.И. Сегин***
**Перспективы построения корреляционных моделей в полярной системе координат**
В статье представлены результаты исследований построения корреляционных моделей в полярной системе координат и соответствующие математические выражения. Показаны особенности построения, представления и перспективы использования корреляционных моделей в полярной системе.

***A.I. Segin***
**The prospects of Construction of Cross-correlation Models in the Polar System of Coordinates**
The results of researches of construction of cross-correlation models in the polar system of coordinates and proper mathematical expressions are presented in the article. The features of construction, presentation and prospects of the use of cross-correlation models in the polar system are presented.

*Стаття надійшла до редакції 17.07.2008.*